

**SIMULATION DU MARCHE ET DE LA CONCURRENCE PAR LES
AUTOMATES CELLULAIRES**

Gilles ROEHRICH
Professeur de Marketing
CERAG – UMR- 5820 - Grenoble
04 76 82 78 66
gilles.roehrich@esa.upmf-grenoble.fr

Suela BYLYKBASHI
Doctorante en Sciences de Gestion
CERAG – UMR - 5820 - Grenoble
Enseignante de marketing
Ecole Supérieure de Commerce Wesford - Grenoble
06 73 41 68 34
sbylykbashi@yahoo.com

Les auteurs remercient M.Brahim MALKI, chercheur au LTPCM-INPG Grenoble, pour ses conseils.

SIMULATION DU MARCHÉ ET DE LA CONCURRENCE PAR LES AUTOMATES CELLULAIRES

INTRODUCTION

Cet article a pour objectif d'explorer l'utilité des automates cellulaires (AC) dans l'étude de la situation concurrentielle sur un marché. Plus précisément, nous présenterons la possibilité d'utilisation des AC pour effectuer des simulations de marché, le lancement des produits nouveaux et l'abandon d'un produit. Les AC peuvent nous permettre de connaître l'évolution des parts de marchés des marques concurrentes sur un marché.

La première partie de cet article sera une présentation générale des AC. La deuxième partie sera consacrée à leur utilisation en marketing et les résultats d'un cas fictif de simulation d'une situation simplifiée d'un marché. Dans la troisième partie, certaines pistes permettant de se rapprocher des situations réelles des marchés, seront présentées.

LES AUTOMATES CELLULAIRES

Chaque système analysé grâce à un grand nombre d'éléments discrets avec interactions locales peut être considéré comme un automate cellulaire (AC). Les AC sont des modèles mathématiques où l'espace et le temps sont des variables discrètes. Les AC sont considérés comme une représentation d'un système de plusieurs composants, chacun étant en interaction avec ses voisins.

Les AC ont été introduits par John Von Neuman et Stanislas Ulam en 1940 (sous le nom d'« espaces cellulaires ») dans le but de réaliser des systèmes mathématiques simples capables de se reproduire à la manière d'un organisme vivant. En 1970 John Conway crée l'automate cellulaire le plus connu « Le jeu de la vie », comme une représentation de la survie des espèces. Son idée était que la reproduction et la survie des espèces est souvent gouvernée par des règles simples et de portée locale, dépendant de chaque espèce et des espèces voisines.

Aujourd'hui, les automates cellulaires sont des modèles mathématiques utilisés dans plusieurs disciplines. Ils sont très utilisés dans les sciences dures, comme en physique, en chimie ou en métallurgie. Mais ils ont également investi le champ des sciences sociales. Ils sont par exemple utilisés en sociologie pour modéliser la transmission de la culture entre les individus, pour expliquer la formation des groupes et de la conformité, ou pour analyser la manière dont les individus interagissent les uns avec les autres en échangeant leurs valeurs afin de s'améliorer etc. (Gaylord & Nishidate, 1996). Les résultats obtenus sont souvent étonnants dans la mesure où la simulation d'un phénomène complexe est obtenue à partir des règles simples et dans lesquelles le « hasard » tient souvent une place importante.

Qu'est ce qu'un automate cellulaire ?

Un AC peut être défini à la fois d'une manière mathématique et à la fois informatique (Gaylord & Nishidate , 1996)

Définition mathématique de l'AC.

Un AC est un système dynamique discret où l'espace, le temps et les états du système sont discrets et ont les caractéristiques suivantes :

- L'espace est représenté par une grille régulière à une, deux ou trois dimensions (voir plus bas pour les explications).
- Chaque élément (ou case) du système peut prendre un nombre fini d'états.
- L'AC évolue dans le temps et les valeurs des éléments sont actualisées à chaque instant t.
- Les éléments sont mis à jour en utilisant certaines règles, qui tiennent compte de la valeur de chaque élément et de ses voisins.

Créer un Automate Cellulaire revient à créer un univers simple, avec sa propre structure d'espace-temps et ses propres lois.

Définition de l'AC en informatique

Un automate cellulaire est un réseau de cellules de dimension n qui interagissent les unes avec les autres, où chaque cellule peut prendre k différents états à chaque instant t (Gaylord & Nishidate, 1996, pg 23). A chaque instant t chaque cellule peut changer d'état en fonction des règles de transition de l'AC. Les règles déterminent comment une cellule change d'état à l'instant t en fonction de son état et de celui de ses cellules voisines à l'instant $t-1$.

Construction d'un automate cellulaire

Pour construire un automate cellulaire il faut le définir selon trois caractéristiques : sa géométrie, ses règles de voisinage et ses règles d'interaction.

Géométrie du réseau de cellules :

Il s'agit de son nombre de dimensions : une, deux ou trois.

- Les AC à une dimension

Cette géométrie peut se visualiser comme un AC qui a deux cellules voisines, une à droite et une à gauche

Soit a_i^t la valeur de la cellule i à la période t .

$$a_i^{t+1} = F(a_{i-1}^t, a_i^t, a_{i+1}^t)$$

L'état de la cellule i à la période $t+1$ sera donc fonction de son propre état, de l'état de la cellule $i-1$ et de celui de la cellule $i+1$, à la période t .

- Les AC à deux dimensions

Cette géométrie peut se visualiser comme un AC qui a des cellules dans tous les points d'un plan avec des coordonnées intégrales.

Soit a_{ij}^t la valeur de la cellule i,j à la période t .

$$a_{ij}^{t+1} = F(a_{ij}^t, a_{i-1,j}^t, a_{i,j-1}^t, a_{i+1,j}^t, a_{i,j+1}^t)$$

L'état de la cellule ij à la période $t+1$ sera donc fonction de son propre état et de l'état des cellules $i-1,j$, $i+1,j$, $ij-1$ et $ij+1$ à la période t .

- Les AC à trois dimensions

Cette catégorie d'AC a des cellules à chaque point d'une espace euclidienne avec des coordonnées intégrales.

Le voisinage

La notion de voisinage est utilisée ici dans son sens informatique, c'est-à-dire comme toutes les cases entourant une case centrale, y compris les cases adjacentes situées dans le prolongement des diagonales. Dans un réseau donné il faut préciser comment le voisinage d'une cellule modifie l'évolution de cette dernière, c'est-à-dire comment les cases entourant une case centrale modifient son évolution. Pour cela il faut définir d'abord le nombre de voisins en contact avec une cellule.

Trois types de voisinage ont été utilisés dans le cas d'un réseau à deux dimensions :

- a) Le voisinage Von Neumann où chaque cellule a des relations avec quatre voisins, situé respectivement au nord, au sud, à l'est, à l'ouest (fig 1)

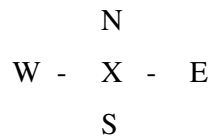


Fig.1 : Le voisinage von Neumann

- b) le voisinage Moore où chaque cellule a des relations avec huit voisins, situés respectivement au nord, nord-est, est, sud-est, au sud, sud-ouest, ouest et nord-ouest (fig.2).

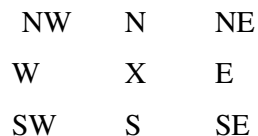


Fig.2 : Le voisinage Moore

c) Le voisinage Moore von Neumann où chaque cellule a des relations avec quatre cellules de plus situé au nord, est, sud, ouest (fig. 3).

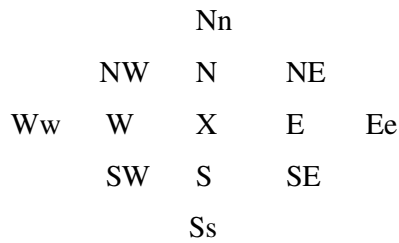


Fig.3 : Le voisinage Moore von Neumann

Pour créer un AC homogène on utilise le même type de voisinage pour toutes les cellules.

Les règles d'interactions entre les cellules

Le principe de fonctionnement d'un AC est que chaque cellule peut prendre à chaque instant un nombre fini d'état, et que son état à l'instant t est fonction de ses interactions avec les cellules voisines. Si k le nombre d'états possible de chaque cellule et m le nombre de cellule voisines, il existe k^m règles d'interaction possibles.

Un AC est exprimé comme un algorithme. Pour le construire, on définit d'abord une matrice dont les éléments peuvent être des nombres réels, des entiers naturels, des symboles ou même des vecteurs, selon le système qu'on veut modéliser. On définit ensuite une fonction qui détermine les règles de changement de la valeur de chaque élément (cellule) de la matrice en fonction de son état initial et de l'interaction avec ses voisins.

Soit n la dimension de la matrice, k le nombre des états possible de chaque cellule, F la fonction de changement des cellules, N les valeurs des cellules voisines, alors la dynamique de l'AC dépendra de l'états initial des cellules C_0, F, N .

APPLICATION DES AUTOMATES CELLULAIRES EN MARKETING

Pour appliquer les AC en marketing il faut définir d'abord la notion d'espace. Que va exprimer un AC et de quoi vont être composées les cellules ?

Marché et marketing

Suivant Grover et Srinivasan (1987) nous définissons un marché comme « un ensemble de consommateurs avec des préférences hétérogènes pour les marques ». L'hétérogénéité des préférences s'explique par deux facteurs : l'hétérogénéité des situations d'achat (somme disponible, usage prévu, lieu d'achat, etc.) et l'hétérogénéité dans la structure des critères de choix (importance donnée au prix, ou à une caractéristique spécifique, etc.).

L'hétérogénéité des préférences est un élément important, puisque c'est elle qui fonde la segmentation du marché. La segmentation d'un marché est la subdivision de ce marché en sous-groupes formés de consommateurs qui expriment une préférence identique à l'instant de l'achat. Il en découle qu'à l'instant t , un segment est constitué des acheteurs qui font le même choix de marque.

La dynamique du marché dépend alors de l'offre que chaque marque fait sur le marché. Cette offre est constituée du marketing mix (produit, prix, promotion, place) et exerce un appel plus ou moins fort sur les différents segments. Ainsi, une marque peu chère, et de qualité moyenne, sera plus attractive pour un consommateur occasionnel que pour un gros consommateur. A chaque période, une partie des consommateurs se trouve en situation d'achat, les autres non. Ces consommateurs vont donc choisir une marque en fonction de leur besoin (type d'usage) et des positionnements des marques.

Marché et AC

Un AC de dimension n correspond donc à un marché de $n \times n$ consommateurs. Comme dans les modèles de type pick/any/ le nombre des alternatives (les différentes marques)

évaluées par les consommateurs et leur identité sont supposés connus. L'AC peut avoir une ou deux dimensions et les trois types de voisinages peuvent être utilisés.

Les cellules de l'AC sont donc composées de couples « consommateur – marque », une lettre (A, B, C, ...) désignant le consommateur, caractérisé par son comportement d'achat, et un numéro (1, 2, 3, ...) désignant la marque, caractérisée par son marketing mix. Les consommateurs (A, B, C, ...) sont caractérisés par un vecteur U_{ijt} qui est le vecteur d'utilité de la marque j pour le consommateur i et pour la situation d'usage t. Les marques sont caractérisées par un vecteur T_j qui exprime le marketing mix de la marque j. Après avoir défini les états initiaux des AC, il est toujours possible de modifier les valeurs des vecteurs U_{ijt} et T_j .

Après avoir déterminé les règles de l'AC, incluant la modification des structures des vecteurs U_{ijt} et T_j , nous obtenons, après p itérations :

- l'évolution des ventes de chaque marque en fonction du nombre d'itérations (périodes d'achat) et de la dimension n de l'AC ou des $n \times n$ consommateurs (fig. 5).
Puisque la part de marché reflète la compétitivité marketing de l'entreprise (Bultez, 1996), il est possible, après chaque itération, d'identifier le sens de l'évolution de la part de marché de chaque marque, et d'en déduire ce qu'elle doit faire : attaquer, se défendre, etc (Voir Merunka & Roy , 1991, pour les autres possibilités)
- Des informations sur ce qui se passe quand une nouvelle marque entre dans le marché ou qu'une marque existante sort du marché. (Cas de *lancement de produit nouveaux, extension ou disparition de marques*)

ILLUSTRATION

Nous présentons ici la simulation de la situation concurrentielle d'un marché fictif. A l'instar des simulations faites dans les sciences sociales, celle-ci utilise un réseau à deux dimensions, le voisinage von Neumann. Par ailleurs, cette première simulation s'appuie sur les règles simples suivantes :

- le marché est constitué de trois segments, A, B et C, où A représente les consommateurs « rationnels » dans leurs choix (ils comparent les deux marques et ils choisissent la meilleure), B représente les consommateurs fidèles à une marque (ils ne changent pas de marque) et C les consommateurs qui recherchent la variété (ils changent de marque pour le simple plaisir de changer). Bien que ces trois types de consommateurs soient réalistes (ils sont observables sur de nombreux marchés), ils ne représentent pas la diversité des segmentations utilisables ;

- deux marques, 1 et 2, avec leurs mix respectifs, à utilité équivalente ;
- chaque consommateur ne choisit qu'une marque à la fois ;
- les consommateurs ont la même fréquence d'achat, et achètent à chaque période.

Nous avons construit une matrice de dimension 40 ($n=40$) ou 1600 consommateurs, avec une densité de la population initiale de 2 %. La densité de la population exprime le pourcentage des cellules vides dans un AC. Cette densité dans notre simulation de la situation concurrentielle d'un marché correspond au nombre de consommateurs qui ne consomme ni la marque 1 ni la marque 2.

Quand le consommateur de type A « rencontre » les marques 1 et 2 il va choisir la marque avec l'utilité maximale (Le but de cet article n'est pas de déterminer comment les consommateurs choisissent les marques, se basant sur les préférences, attentes ou les intentions d'achat). Prenons comme hypothèse que la marque 1 est moins chère que la marque 2 et que le consommateur ne fait son choix qu'en fonction du prix. Alors le

consommateur A étant très sensible au prix va choisir la marque 1. (En effet les AC permettent de mettre autant de variables que nécessaire).

Dans un marché certains segments sont fidèles à une marque et d'autres changent de marque. Le consommateur de type B représente un consommateur fidèle de la marque 1 ou 2. S'il consomme la marque 1, il gardera la marque 1 et s'il consomme la marque 2 il gardera la marque 2.

Le consommateur de type C recherche la variété. Si le consommateur C consommait la marque 1, il changera de marque, et donc achètera la marque 2, dès qu'il la rencontrera, pour ensuite repasser à la marque 1, à la rencontre suivante, et ainsi de suite.

La figure 4 représente un AC (de dimension $n=3$) ou un marché de 9 consommateurs($3*3$). La première partie de la figure présente l'état de l'AC à l'instant t (période initiale). La deuxième partie présente l'état de l'AC à l'instant $t+1$ après la première itération. Les cellules A1 (le consommateur de type A qui consomme la marque 1) ne vont pas changer et les cellules A2 (le consommateur de type A qui consomme la marque 2) seront transformées en cellules A1.

Les cellules B1 (le consommateur de type B fidèle à la marque 1) ne changeront pas. Les cellules B2 (le consommateur de type B fidèle à la marque 2) ne changeront pas.

Les cellules C1 (le consommateur de type C qui consomme la marque 1) seront changées en cellules C2 (le consommateur de type C qui consomme la marque 2) et vice versa.

A1	A1	A2
B1	C1	B1
B2	C2	C1

Situation à l'instant t

A1	A1	<u>A1</u>
B1	<u>C2</u>	B1
B2	<u>C1</u>	<u>C2</u>

Situation à l'instant t +1 (après une iteration)

Fig. 4 : L'état initial et l'état après la première itération d'un AC

Résultats

Les figures 5 et 6 présentent les résultats de la simulation de la situation concurrentielle des marques 1 et 2 sur un marché de 1600 consommateurs où elles possèdent chacune au début de la simulation 50% du marché, avec une densité de la population de 2% et après 20 itérations.

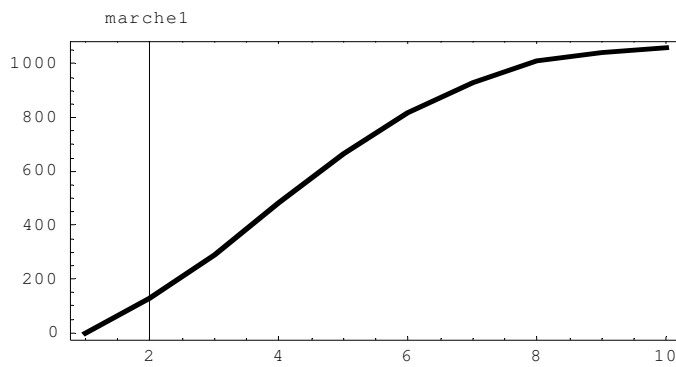


Fig. 5 : Evolution des ventes de la marque 1 lorsqu'elle est moins chère

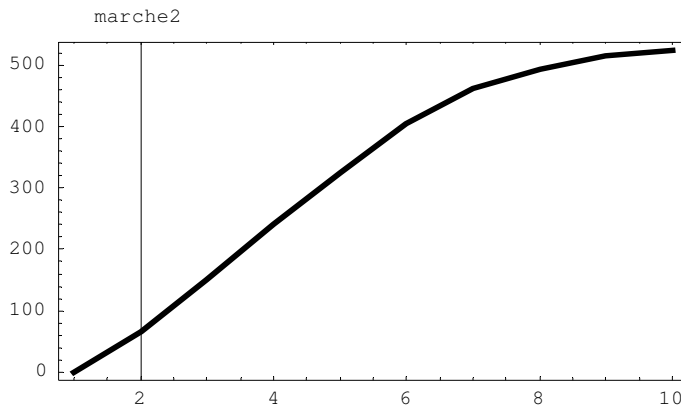


Fig. 6 : Evolution des ventes la marque 2 lorsque la marque 1 est moins chère

On observe donc que, dans un contexte où la marque 1 est moins chère que la marque 2, la répartition des parts de marché est de 72,5% pour la marque 1, contre 37,5% pour la marque 2.

Une telle situation peut pousser la marque 2 à diminuer son prix de vente. Afin d'illustrer l'effet d'une telle mesure, une nouvelle simulation a été effectuée. Les conditions de cette simulation sont exactement les mêmes que précédemment, à l'exception d'une diminution du prix de vente de la marque après la troisième itération. En conséquence, la marque 1 reste moins chère que la marque 2 quand le nombre t d'itérations est inférieur à 3 ($t < 3$), mais la marque 2 devient moins chère que la marque 1 quand le nombre t d'itérations est supérieur à 3 ($t > 3$). Ce changement de prix de la marque 2 va avoir des conséquences sur le comportement des consommateurs A. Les consommateurs de type A, qui choisissent leurs marques en fonction du prix, auront tendance à choisir la marque 1 durant les 3 premières itérations, mais se tourneront vers la marque 2 après la troisième itération, puisque cette marque est maintenant la moins chère. Les comportements des consommateurs de type B (fidèles) et C (qui recherchent la variété) ne vont pas changer.

Pour simuler cette situation nous avons considéré le même AC de dimension $n=40$, la même densité de la population de 2 % ($d=2\%$), mais les règles d'interaction entre les

cellules sont différentes quand $t < 3$ et quand $t > 3$. Les figures 7 et 8 présentent les résultats de cette nouvelle simulation.

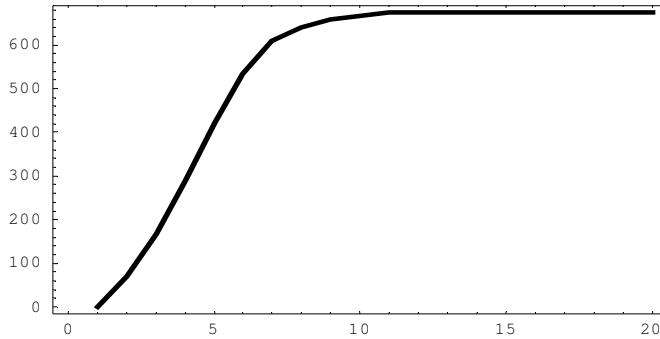


Fig. 7 : Evolution des ventes de la marque 1 lorsque cette marque est moins chère durant les trois premières périodes, puis plus chères durant les périodes suivantes

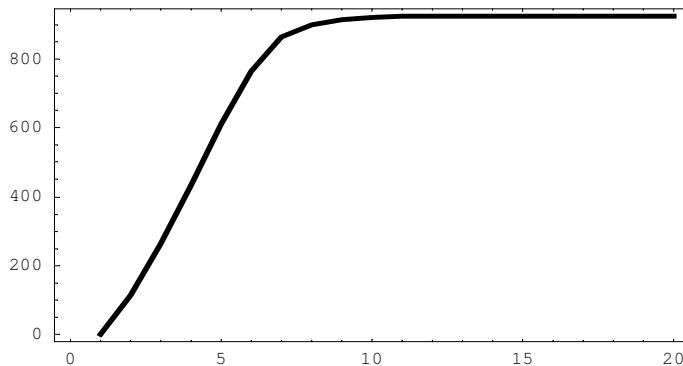


Fig. 8 : Evolution des ventes de la marque 2 lorsque la marque 1 est moins chère durant les trois premières périodes, puis plus chères durant les périodes suivantes

Il apparaît ici clairement que la modification de prix de la marque 2 a eu une influence importante sur les ventes de cette marque : sa part de marché est maintenant de 59%.

DISCUSSION

La grande simplicité des simulations qui viennent d'être présentées justifie de discuter certains des choix qui ont été faits.

Segmentation du marché et AC

La structure du marché qui a été utilisée est très simple : trois segments et deux marques. De plus, chaque consommateur est, dès le départ, affecté à un segment, auquel il reste fidèle tout au long de la simulation. Cette affectation n'est pas réaliste : un consommateur peut appartenir à plusieurs segments, principalement en fonction de la situation dans laquelle il achète.

Afin de modéliser la possibilité qu'un consommateur appartienne à plusieurs segments, deux pistes semblent possibles :

- la première consiste à affecter chaque cellule-consommateur à une situation d'achat avant chaque itération, en tenant compte du poids global de chaque situation d'achat. Si, par exemple, un marché est structuré autour de trois situations d'achat, représentant respectivement 50%, 30% et 20% des contextes d'achat, il serait possible d'affecter aléatoirement, au début de chaque itération, 50% des acheteurs à la première situation d'achat, 30% à la seconde et 20% à la dernière.
- La seconde consiste à diviser chaque AC en autant de sous AC qu'il y a de segments. De cette façon l'hétérogénéité des consommateurs est présentée par l'utilisation de plusieurs segments homogènes où chaque segment a un comportement d'achat spécifique. Les modèles de la structure concurrentielle ont supposé que la réponse des consommateurs pour une marque est indépendante des réponses pour les autres marques. Ainsi dans les modèles de type Dirichlet – multinominal et choice map on suppose que chaque consommateur a une

probabilité constante de choisir une marque pour chaque situation d'usage et ces choix sont indépendants entre les consommateurs et les situations d'usage (Elrod et Keane, 1995). Les AC permettent de dépasser cette limite. Ainsi les AC nous permettent de mettre différentes conditions où le comportement d'un type de consommateurs dans un segment peut être dépendant de son comportement dans un autre segment. C'est à dire que dans les AC les probabilités de choix des marques peuvent ne pas être constantes.

Probabilité de choix des marques.

Le choix d'une marque est un processus beaucoup plus complexe que présenté ci-dessus. Les consommateurs de type A ne raisonnent pas qu'en fonction du prix. Ils sont également sensibles à d'autres critères, comme la disponibilité des marques, leur image, leur design etc. Quelle est, dans ce contexte, la probabilité qu'un consommateur de type A choisisse la marque 1 plutôt que la marque 2 ? Il serait envisageable d'utiliser des formules telles que celle de la simulation MARKSTRAT (Larréché et Gatignon, 1990), où la probabilité de choisir une marque est exprimée comme suit :

$$\begin{array}{r}
 \text{Probabilité} \\
 \text{d'achat de la marque 1} \\
 \text{dans le segment S}
 \end{array}
 = \frac{
 \begin{array}{r}
 \text{Couverture effective} \\
 \text{de la distribution de la marque 1} \\
 \text{dans le segment S}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{r}
 \text{Indice de l'intention} \\
 \text{d'achat de la marque 1} \\
 \text{dans le segment S}
 \end{array}
 }{
 \begin{array}{r}
 \text{Couverture effective de la} \\
 \text{distribution de toutes les} \\
 \text{marques dans le segment S}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{r}
 \text{Indice de l'intention} \\
 \text{d'achat de toutes les} \\
 \text{marques dans le seg. S}
 \end{array}
 }$$

Le temps

L'ordinateur nous donne des résultats en quelques secondes. Le problème qui se pose est comment traduire ces secondes en temps réel et comment exprimer l'évolution des ventes en fonction du temps réel. Pour résoudre ce problème nous avons considéré qu'une itération peut exprimer le temps entre deux achats. Cela implique que ce temps va

dépendre du type de produit et qu'il sera différent pour différents produits, donc pour différents AC.

La fréquence d'achat

Nous avons supposé que les consommateurs ont la même fréquence d'acheter une marque. Il serait plus réaliste de considérer qu'à chaque période, seule une fraction des consommateurs effectue réellement un achat.

La densité de la population

Un élément important pour les simulations avec les AC est la densité de la population initial, qui exprime le pourcentage des cellules vides dans un AC. Cette densité dans notre simulation de la situation concurrentielle d'un marché est le nombre de consommateurs qui ne consomme ni la marque 1 ni la marque 2. Autrement est ce que le marché est saturé ou pas. Voici comment les ventes de la marque 1 changent en fonction de la densité de la population initiale.

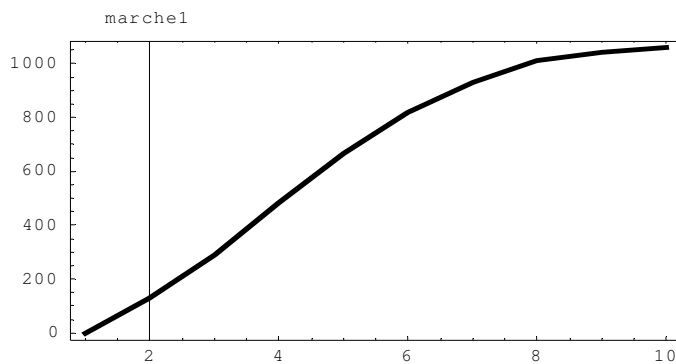


Fig. 9 : Exemple d'évolution des ventes pour la marque 1, où la marque 1 est moins chère que la marque 2 avec une densité de la population initiale de 2%

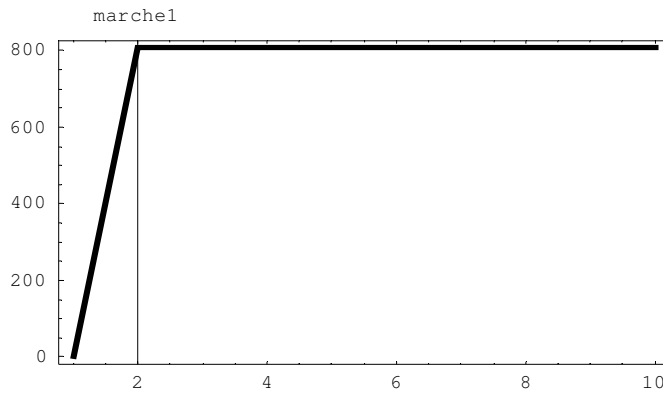


Fig. 10 : Exemple d'évolution des ventes pour la marque 1 où la marque 1 est moins chère que la marque 2 avec une densité de la population initiale de 80%

CONCLUSION :

Les AC sont des outils de simulations de différents phénomènes de la réalité. Elles ont donné des résultats surprenants dans certains domaines. Ainsi certains AC avec des fonctions de transition (règles) proches peuvent devenir très différents, tandis que d'autres AC avec des fonctions différents peuvent devenir identiques. A notre connaissance ils n'ont jamais été utilisés en marketing, pour simuler la situation concurrentielle d'un marché. Nous souhaitons simuler différentes conditions de marché au moyen des AC, et en observer les conséquences sur le fonctionnement concurrentiel. Nous pensons que les AC peuvent permettre de simuler la structure des marchés, l'évolution des parts de marché des marques, et surtout de simuler le lancement d'une nouvelle marque ou la disparition d'une marque obsolète.

Il est important, pour la validité de la simulation, de s'appuyer sur des données réelles de marché, provenant d'études ad hoc ou de panels de consommation. Il serait en effet plus réaliste d'initialiser le modèle avec des données réelles telles que le nombre de marques, la structure du marketing mix de chaque marque, le nombre de segments, la taille de chaque segment et son style de consommation. Après avoir stipulé les conditions initiales du

marché, il est ensuite nécessaire de préciser les règles de transition les plus réalistes possibles. Cette phase est sans doute la plus délicate du travail.

Il est donc nécessaire d'approfondir les règles complexes et les contraintes nombreuses du marché afin de pouvoir nous approcher au maximum des situations réelles. Sans toutefois perdre de vue que la nature est toujours plus riche que les modèles scientifiques les plus complets.

BIBLIOGRAPHIE :

Bultez A., (1996), “Mode de diagnostic de marchés concurrentielle”, **Recherche et**

Applications en Marketing, Vol.11, No. 4, p. 3- 34.

Elrod T. & Keane M., (1995), “A factor-Analytic Probit Model for Representing the Market

Structure in Panel Data”, **Journal of Marketing Research**, Vol. XXXII,

(February 1995), p. 1 – 16.

Gaylord Richard J. & Nishidate Kazume, “Modeling Nature, Celullar Automata Simulations

with Mathematica”, **Springer Verlag New York Inc**, 1996, p. 260.

Grover R & Srinivasan V. (1987), “A Simultaneous Approach to Market Segmentation and

Market Structuring”, **Journal of Marketing Research** , Vol. XXIV, (May 1987),

139 – 53.

Larréché J. C & Gatignon H., (1990), Markstrat 2 _A marketing strategy simulation,

Instructors Manual, **The scientific Press, Redwoos City**

Merunka D & Le Roy I., 1991, « Competitor : Un modèle de positionnement concurrentiel

des marques appliqués à des données de panel consommateur, **RAM**, Vol. VI, N.

2, 1991, p. 1 – 24.

Wolfram Stephen, Cellular Automata and Complexity: Collected Paper, **Addisson Wesley**

Publishing Company, 1994, p. 596.