

Valentina Stan
Ecole Supérieure des Sciences Commerciales d'Angers
Professor
1 rue Lakanal - BP 40348 49003 Angers CEDEX 01; France
e-mail : valentina.stan@essca.fr

Emmanuel Jakobowicz
Conservatoire National des Arts et Métiers and EDF R&D
Ph.D. in Statistics
292, Rue Saint Martin; 75141 Paris Cedex 03; France
e-mail : emmanuel.jakobowicz@free.fr

Utilisation du test des tétrades pour caractériser les relations entre variables manifestes et variables latentes. La relation entre la satisfaction et ses antécédents

L'utilisation des modèles d'équations structurelles est en plein essor dans plusieurs domaines dont le marketing. L'article se focalise sur le modèle de mesure, plus précisément sur la définition de l'orientation des relations entre les variables manifestes et leurs variables latentes. Dans cette optique, nous utilisons le test des tétrades qui est rarement utilisé en marketing et en présentons des applications pratiques aussi bien sur des données simulées que sur des données réelles issues d'une enquête de satisfaction. Nous mettons ainsi en évidence les capacités et les limites de ce test.

Mots clés : modèles d'équations structurelles, modèle de mesure, indicateurs réflectifs, indicateurs formatifs, test des tétrades

Presentation and use of the tetrad test to characterize the relationships between latent variables and manifest variables. The relationship between the satisfaction and its antecedents

Structural equations models have found increased applications in several domains including marketing. A test to define the orientation of the relationship between manifest and latent variable in the measurement model is presented. It is called the vanishing tetrad test. Applications to simulated data and to real customer satisfaction data are presented. We put in evidence the capacities and limits of this test.

Keywords: structural equation models, measurement model, reflective indicator, formative indicator, tetrad test

Les auteurs remercient chaleureusement M. Gilles Laurent (Groupe HEC) pour ses très utiles conseils et sa disponibilité lors de l'élaboration de cet article.

INTRODUCTION

Ces dernières années, on constate une grande «productivité» dans la construction des modèles d'équations structurelles en marketing, ceux-ci étant développés en vue de faciliter la prise de décisions au niveau managérial. Le succès de ces méthodes peut être expliqué par le fait qu'elles offrent la possibilité de traiter simultanément la nature de la mesure des variables latentes et d'analyser des structures théoriques représentant les relations entre ces variables (Valette-Florence, 1988).

En 1995, Bass mentionne que la science du marketing est un processus dans lequel «*theory testing*» est nécessaire pour développer des modèles de marketing valides. Par la suite, tenant compte des résultats issus de la théorie et du «jugement» managérial, les modèles de marketing sont appliqués en pratique.

Selon Kaplan (2000) les modèles d'équations structurelles peuvent être définis comme une classe de méthodologies ayant pour objectif de représenter certaines hypothèses au sujet des moyennes, des variances et des covariances de données observées en termes d'un plus petit nombre de paramètres structuraux définis par un modèle théorique sous-jacent.

Deux types de méthodes d'estimation peuvent être distinguées : l'analyse de la structure de covariances – LISREL (Jöreskog, 1967, 1970) basée sur des principes confirmatoires et la méthode des moindres carrés partiels – PLS (Wold, 1966, 1982, 1985; Valette-Florence, 1988; Tenenhaus *et alii*, 2005) plutôt orientées vers l'exploratoire.

Quelle que soit l'approche utilisée, ces modèles posent encore des problèmes aux chercheurs autant au niveau de la spécification du modèle de mesure (ou externe) qu'au niveau de la spécification du modèle structurel (ou interne). Ces méthodes sont basées sur des modèles préétablis basés sur la théorie associée au domaine d'application et nécessitent de fortes connaissances sur celui-ci. Comme le soulignent Bagozzi et Phillips (1982), Edwards et Bagozzi (2000), une théorie peut être divisée en deux parties : une qui décrit les relations entre les construits latents et les variables observées (c'est-à-dire le modèle de mesure) et l'autre qui estime les relations entre les variables latentes (le modèle structurel).

Selon Edwards et Bagozzi (2000), les chercheurs se préoccupent plus du modèle structurel et accordent peut-être moins d'attention au modèle de mesure. Or, plusieurs travaux (Anderson

et Gerbing, 1982; Gerbing et Anderson, 1988; Bollen, 1989) supposent que le modèle de mesure détermine la validité du modèle complet.

Dès les années 1980, Peter (1981, p. 133) précisait : *«parce que la validité du construit concerne le degré de correspondance entre les construits et leurs mesures, elle est une condition nécessaire au développement et au test de la théorie. Il est donc étrange que les chercheurs en marketing aient accordé si peu d'attention explicite à la validation du construit, alors que cela est bien documenté dans la littérature marketing»*.

Suite à ces critiques, ainsi qu'à celles d'autres auteurs (Churchill, 1979; Bagozzi, 1980; Anderson et Gerbing, 1982), les chercheurs ont commencé à s'intéresser de plus en plus à la validité des construits et ont mis en place des évaluations plus rigoureuses des propriétés de mesure des construits (Jarvis, MacKenzie et Podsakoff, 2003).

Dans le cadre du modèle de mesure, l'un des principaux problèmes réside dans l'orientation des relations entre les variables manifestes (variables observées, mesures, items) et leur variable latente (construit, variable théorique) associée. Ce domaine de recherche cristallise de nombreuses discussions ces dernières années aussi bien dans le domaine de la psychologie quantitative (Howell *et alii*, 2007a, 2007b ; Bollen, 2007 ; Bagozzi, 2007) que dans celui du marketing (numéro spécial de la revue *Journal of Business Research* à paraître). Les conséquences de ce choix sont multiples, à la fois pratiques (au niveau des estimations) et théoriques (sur la notion même de variable latente). D'un point de vue pratique, plusieurs approches sont présentées dans la littérature (Crié, 2005; Tensaout, 2006) afin d'aider les chercheurs à mieux spécifier les relations entre les mesures et leur variable latente : l'approche classique, l'approche basée sur des principes de causalité et l'approche basée sur le test des tétrades.

Notre travail se focalise sur le modèle de mesure, plus précisément sur l'utilisation du test des tétrades (Glymour *et alii*, 1987; Bollen et Ting, 1993, 2000). Malgré son utilité dans la définition de l'orientation des relations entre les variables manifestes et leurs variables latentes, ce test est peu présent dans les recherches empiriques en marketing. Voilà pourquoi nous considérons que cet article peut « inciter » les chercheurs à le prendre en considération dans leurs travaux afin de valider statistiquement un modèle de mesure prédéfini.

Dans la première partie nous présentons brièvement les deux types de modèles de mesure : réflectif et formatif. La deuxième partie est consacrée au test des tétrades. Ensuite, une

application pratique axée sur l'utilisation de ce test est présentée. Enfin, nous présentons les conclusions de notre travail et les axes futurs de recherche.

MODELE DE MESURE DE TYPE REFLECTIF OU FORMATIF ?

Dans la théorie classique des tests (Nunnally, 1978), les variables observées (indicateurs) sont directement dépendantes d'un construit, de sorte que toute variation dans le construit soit reflétée par une variation des valeurs de ses indicateurs. Selon la même théorie, la variation des valeurs des mesures liées à un construit est considérée comme une fonction de sa vraie valeur et d'un terme d'erreur. Selon Jarvis, MacKenzie et Podsakoff (2003), ce sens supposé de la causalité (de la variable latente à ses mesures) est approprié conceptuellement dans de nombreux cas, mais pas dans tous.

Dans la littérature, on peut identifier deux principaux modèles de mesure : le modèle en facteur principal (ou réflectif) et le modèle de variables latentes composé à partir de plusieurs indicateurs (ou formatif). La figure suivante présente les deux types de modèle de mesure :

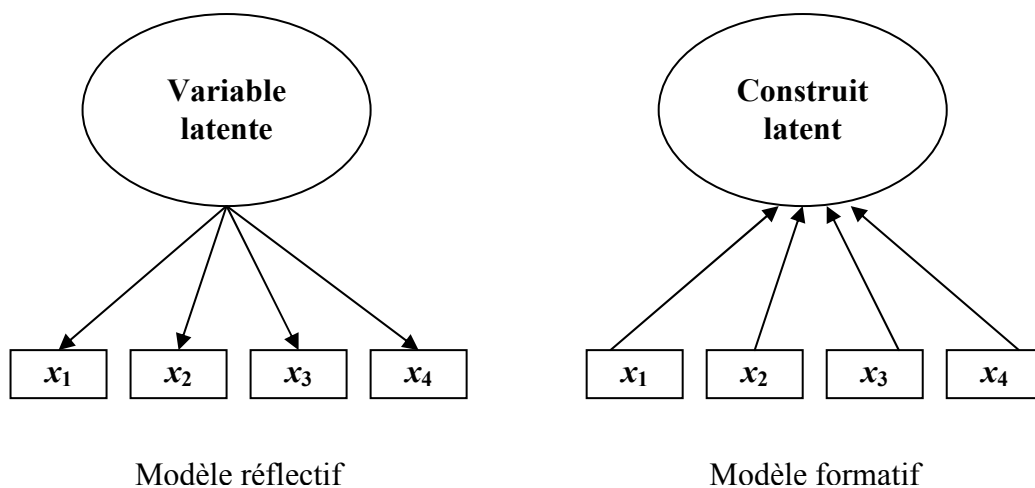


Figure 1 : Exemple de modèle réflectif et formatif

De manière formelle, on peut écrire (Tenenhaus *et alii*, 2005) :

- Pour le modèle réflectif (un modèle de régression simple de chaque manifeste sur sa latente) : $x_{jh} = \pi_{jh}^0 + \pi_{jh}\xi_j + \delta_{jh} \quad \forall h = 1, \dots, k_j; \forall j = 1, \dots, J$

avec x_{jh} est la variable manifeste h associée à la variable latente ξ_j , π_{jh}^0 est un terme constant, π_{jh} est le coefficient de régression et δ_{jh} est un terme d'erreur.

- Pour le modèle formatif (la variable latente est une fonction linéaire des variables manifestes associées) :
$$\xi_j = \sum_{h=1}^{k_j} \varpi_{jh} x_{jh} + \varsigma_j$$
 avec ϖ_{jh} ($h=1, \dots, k_j$) sont les coefficients de la régression multiple de ξ_j sur les x_{jh} et ς_j est un terme d'erreur.

Selon Fornell et Bookstein (1982), le modèle formatif indique que les mesures sont des causes du concept qu'elles construisent. Par contre, dans le modèle réflectif, elles sont spécifiées comme le reflet du construit qui rend compte de leurs variances et covariances observées (Crié, 2005).

Pour le modèle de mesure réflectif, les blocs de variables manifestes, outre leur cohérence théorique, doivent satisfaire un certain nombre de propriétés. Les corrélations entre les mesures qui composent un construit doivent être plus fortes avec leur propre variable latente qu'avec les autres variables latentes du modèle. D'autre part, les variables manifestes qui sont reliées à une variable latente doivent être fortement corrélées les unes aux autres. Enfin, une hypothèse capitale est la consistance interne du bloc (celle-ci peut être vérifiée par le alpha de Cronbach). Finalement, il est possible de vérifier l'unidimensionnalité des variables du même bloc (celle-ci peut être vérifiée par l'importance de la première composante principale par rapport à la seconde lors de l'analyse en composantes principales sur chaque bloc).

Par contre, le modèle formatif ne présuppose pas que les mesures soient toutes causées par un seul et même construit sous-jacent. Les mesures formatives influencent le construit latent. Elles peuvent être corrélées, mais le modèle ne le présuppose pas ou ne le nécessite pas (Jarvis, MacKenzie et Podsakoff, 2003; MacKenzie, Podsakoff et Jarvis, 2005). En conséquence, pour un modèle de type formatif la fiabilité de la cohérence interne n'est pas appropriée pour juger l'adéquation des mesures.

Dans les applications pratiques réalisées, le modèle réflectif est le plus utilisé (Baumgartner et Homburg, 1996; Lee, Barua et Whinston, 1997; Jarvis, MacKenzie et Podsakoff, 2003; Crié, 2005; MacKenzie, Podsakoff et Jarvis, 2005; Tensaout, 2006), car plus proche de la théorie classique de la mesure. Cette prédominance du modèle réflectif peut avoir plusieurs

explications (Tensaout, 2006). L'une d'elles est la difficulté d'identification et d'estimation du modèle formatif (Williams, Edwards et Vandenberg, 2003; Jarvis, MacKenzie et Podsakoff, 2003; MacKenzie, Podsakoff et Jarvis, 2005). De plus, si le chercheur utilise l'approche par analyse de la structure de covariance (LISREL), il est obligé d'utiliser le modèle réflectif, car cette méthode n'intègre pas directement les relations formatives entre les mesures et leurs construits (néanmoins on peut utiliser des modèles du type MIMIC - Multiple effect Indicators for Multiple Causes - afin d'obtenir un modèle identifiable). Comme cette méthode est la plus utilisée en marketing (une des raisons est son intégration dans les logiciels les plus connus), ceci peut expliquer, en partie, la prédominance du type réflectif. Par ailleurs, l'obligation de publier l'alpha de Cronbach dans les articles de recherches discrédite de nombreux modèles formatifs.

Une autre explication peut être trouvée dans le débat sur le « statut théorique de la variable latente » (Borsboom, Mellenbergh, Heerden, 2003; Bollen, 2002; Tensaout, 2006).

Dans la théorie classique de la mesure, il est nécessaire que la variable latente satisfasse le principe d'indépendance locale. Les variables manifestes associées à une variable latente sont indépendantes conditionnellement à leur variable latente (Bollen, 2002; Borsboom, Mellenbergh, Heerden, 2003). Dans le cas réflectif, cette hypothèse est respectée alors qu'elle ne l'est pas dans le cas formatif. Il apparaît donc que, dans le cadre du modèle formatif, le construit ne peut pas être considéré comme une variable latente, dans le sens de cette définition.

En ce qui concerne le choix entre le modèle de mesure réflectif et formatif, Jarvis, MacKenzie et Podsakoff (2003) proposent plusieurs critères qualitatifs. Ces critères sont présentés dans le tableau suivant sous forme de réponse à des questions :

Questions	Modèle réflectif	Modèle formatif
1. <i>Sens de la causalité du construit à la mesure impliqué par la définition conceptuelle</i> Les indicateurs sont-ils des caractéristiques de définition ou des manifestations du construit? Est-ce que des changements dans les indicateurs causent des changements dans le construit ? Est-ce que des changements dans le construit causent des changements dans les indicateurs?	Le sens de causalité va du construit aux items Les indicateurs sont des manifestations du construit Changements dans les indicateurs ne causent pas de changements dans le construit Changements dans le construit causent des changements dans les indicateurs	Le sens de causalité va des items au construit Les indicateurs sont des caractéristiques de définition du construit Changements dans les indicateurs causent des changements dans le construit Changements dans le construit ne causent pas de changements dans les indicateurs
2. <i>Interchangeabilité des indicateurs / items</i> Les indicateurs doivent-ils avoir un contenu similaire ? / Les indicateurs partagent-ils un thème commun ? Supprimer un des indicateurs altérerait le domaine conceptuel du construit ?	Les indicateurs doivent être interchangeables Les indicateurs doivent avoir un contenu similaire / Ils doivent partager un thème commun Supprimer un des indicateurs ne doit pas altérer le domaine conceptuel du construit	Les indicateurs n'ont pas besoin d'être interchangeables Les indicateurs n'ont pas besoin d'avoir un contenu similaire / Ils ne doivent pas partager un thème commun Supprimer un des indicateurs peut altérer le domaine conceptuel du construit
3. <i>Covariation entre les indicateurs</i> Un changement dans un des indicateurs doit-il être associé à des changements dans les autres indicateurs ?	Les indicateurs sont supposés covarier les uns avec les autres Oui	Il n'est pas nécessaire que les indicateurs covarient les uns avec les autres Pas nécessairement
4. <i>Réseau nomologique des indicateurs du construit</i> Les indicateurs sont-ils supposés avoir les mêmes antécédentes et conséquences?	Le réseau nomologique des indicateurs ne doit pas différer Il est nécessaire que les indicateurs aient les mêmes antécédentes et conséquences	Le réseau nomologique des indicateurs peut différer Il n'est pas nécessaire que les indicateurs aient les mêmes antécédentes et conséquences

Tableau 1 : Critères de décision pour qualifier un construit comme réflectif ou formatif

Source : Jarvis, MacKenzie et Podsakoff (2003)

Mais l'application d'une typologie de ce type est basée sur la subjectivité du chercheur. Leur pertinence est incontestable, cependant ils n'apportent pas de validation statistique afin de choisir quel type de relations associé à une variable latente. Deux chercheurs qui utilisent ces

critères sur une même échelle peuvent obtenir des résultats différents. Les auteurs eux-mêmes ont eu des difficultés dans leur travail qui porte sur une revue des spécifications de modèles de mesure dans quatre des revues de marketing les plus prestigieuses.

Même si le chercheur a de l'expérience dans le domaine, il fait seulement des hypothèses qui doivent être testées. C'est pour cette raison que nous considérons que le test des tétrades, présenté dans le paragraphe suivant, peut être un outil intéressant pour les chercheurs dans la validation du modèle de mesure d'un point de vue statistique.

LE TEST DES TETRADES

Dans plusieurs recherches (Bollen, 1984, 1989; Bollen et Lennox, 1991; Hayduk, 1987; MacCallum et Browne, 1993), il est précisé qu'il existe des variables manifestes devant être traitées plutôt comme des déterminant que comme des effets d'une variable latente. Rossiter (2002) précise qu'en marketing la plupart des construits utilisés sont de nature formative. Mais cette hypothèse n'est basée que sur des études empiriques.

En 1904, Spearman a mis au point les bases de ce qui devait devenir l'analyse factorielle. Dans ce travail et ultérieurement (Spearman, 1927), il a démontré qu'un seul facteur étant à la base de quatre variables ou plus, implique que la différence dans les produits de certaines paires de covariances de ces variables doit être zéro. Ce qui sera nommé tétrades nulles ou évanescente (*vanishing tetrads*) (Crié, 2005).

Glymour *et alii*, (1987) ont repris récemment ce principe et Bollen (1990) a introduit le test des tétrades sans distribution. Les premiers utilisaient un test de Wishart et le second permet de ne pas supposer que les données ont une distribution spécifique. Il a été repris dans Bollen et Ting (1993, 2000), Hipp et Bollen (2003) et Hipp, Bauer et Bollen (2005). Ce test peut être utile pour établir le sens des relations entre les mesures et leur construit.

Leurs travaux reposent sur l'existence de contraintes de sur-identification dans la recherche des signatures statistiques d'une structure causale (les tétrades associées à un modèle de mesure sont des contraintes). L'approche de Bollen et Ting (1993, 2000) s'inscrit dans la tradition des tests statistiques d'hypothèses, alors que la procédure de Glymour *et alii*, (1987) est exploratoire (inductive).

Dans le premier cas, on parle d'analyse confirmatoire des tétrades (*confirmatory tetrad analysis*) qui teste un ou plusieurs modèles spécifiques (le modèle est donc établi à l'avance). Dans le deuxième cas, il s'agit de l'analyse exploratoire des tétrades (*exploratory tetrad analysis*), un outil qui aide à la construction de modèles non spécifiés à l'avance. C'est la première approche qui nous intéressera.

Avant de définir ce test, il est important d'introduire quelques notions. Une tétrade est formée par la combinaison de plusieurs covariances entre les variables observées. Ainsi, si on considère quatre indicateurs de mesure d'un construit (pour la construction des tétrades il est nécessaire d'avoir au moins quatre variables), une tétrade est définie comme la différence entre deux paires de covariances (Bollen et Ting, 2000).

Comme quatre indicateurs produisent six covariances, on obtient les trois tétrades :

$$\begin{aligned}\tau_{1234} &= \sigma_{12}\sigma_{34} - \sigma_{13}\sigma_{24} \\ \tau_{1342} &= \sigma_{13}\sigma_{42} - \sigma_{14}\sigma_{23} \\ \tau_{1423} &= \sigma_{14}\sigma_{32} - \sigma_{12}\sigma_{34}\end{aligned}\quad (1)$$

Nous utilisons la notation de Kelley (1928) : $\tau_{ijkl} = \sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ik}\sigma_{jl}$.

Une tétrade évanescence (nulle) est telle que $\tau_{ijkl} = 0$.

Dans l'approche des tétrades il existe plusieurs étapes (Bollen et Ting, 2000; Hipp et Bollen, 2003) :

- Identification des spécifications des modèles les plus plausibles concernant les relations entre les indicateurs et les variables latentes ;
- Identification des tétrades indépendantes à calculer pour chaque spécification du modèle ;
- Elimination des tétrades nulles redondantes (c'est-à-dire dépendantes), afin de réduire le nombre de tétrades à tester et de simplifier ainsi l'application du test;
- Test de l'hypothèse de nullité des tétrades (*vanishing tetrad test*).

Comme nous venons de le voir, il faut obtenir des tétrades non redondantes. Par des calculs algébriques simples et par des substitutions, certaines tétrades nulles peuvent être déduites à partir d'autres. Bollen et Ting (1993) ont mis au point une règle générale afin de les repérer : à

chaque fois que la même paire de covariances apparaît dans deux tétrades, alors elles sont redondantes (on doit alors en supprimer une).

Le cas du modèle réflectif

Nous considérons un exemple simple qui est présenté dans la figure suivante :

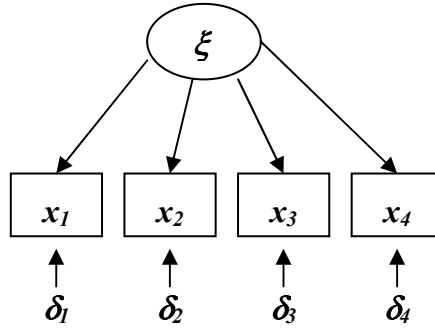


Figure 2 : Modèle réflectif

Ce modèle de mesure réflectif à 4 variables manifestes peut s'écrire en terme d'équations structurelles :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \lambda_1 \xi + \delta_1 \\
 x_2 &= \lambda_2 \xi + \delta_2 \\
 x_3 &= \lambda_3 \xi + \delta_3 \\
 x_4 &= \lambda_4 \xi + \delta_4
 \end{aligned}$$

où δ_i est l'erreur de mesure telle que $E(\delta_i)=0$ et $cov(\delta_i, \delta_j)=0$ si $i \neq j$ et $cov(\delta_i, \xi)=0$.

La covariance sur l'ensemble de la population (σ_{ij}) entre x_i et x_j dépend des poids λ_i et λ_j et de la variance de la variable latente ϕ : $\sigma_{ij} = \lambda_i \lambda_j \phi$.

On a donc:

$$\begin{aligned}
 \tau_{ijkl} &= \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma_{ik} \sigma_{jl} \\
 &= \lambda_i \lambda_j \phi \lambda_k \lambda_l \phi - \lambda_i \lambda_k \phi \lambda_j \lambda_l \phi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

En conséquence, les tétrades d'un modèle réflectif (quelles que soient les valeurs des paramètres du modèle) sont nulles. Il faut donc tester le respect des contraintes sur les tétrades reliées au modèle de mesure, c'est-à-dire leur nullité.

Dans la pratique, la matrice de covariance de la population entre les variables du modèle est inconnue ; elle peut être estimée en utilisant des échantillons finis. En conséquence, les tétrades théoriquement nulles, sont en valeur absolue positives à cause de l'erreur d'échantillonnage (Tensaout, 2006). En effet, cette erreur toujours présente dans les applications, induit un biais qui empêchera la nullité des tétrades. C'est pour cette raison qu'un test statistique adéquat doit être utilisé afin de vérifier l'hypothèse de nullité des tétrades.

Bollen et Ting (1993) ont mis en place un test basé sur la distribution du χ^2 qui permet de vérifier l'hypothèse $H_0 : \tau = \mathbf{0}$, pour toutes les tétrades d'un bloc simultanément. Nous détaillons ce test par la suite.

Le cas du modèle formatif

On considère également un exemple simple :

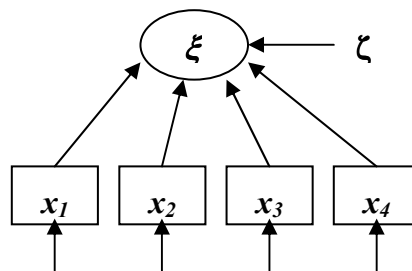


Figure 3 : Modèle formatif

Dans ce cas, on peut écrire que : $\xi = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \zeta$

L'erreur a les propriétés suivantes : $E(\zeta)=0$ et $cov(x_i, \zeta)=0$.

La covariance sur l'ensemble de la population σ_{ij} entre x_i et x_j est : $\sigma_{ij} = E(x_i x_j)$.

Comme les variables observées sont exogènes, il n'y a aucune contrainte concernant la covariance, à l'exception de la situation peu probable, lorsque les valeurs de σ_{gh} et de σ_{ij} sont

égales (Bollen et Ting, 2000). On peut donc considérer que les tétrades dans le cadre du cas formatif ne seront pas nulles.

Présentation du test statistique

Une fois les tétrades indépendantes repérées, il faut vérifier leur nullité. Comme nous l'avons dit plus haut, ces tétrades seront toujours positives en valeur absolue et c'est pour cette raison qu'il faudra utiliser un test statistique afin de décider si elles sont suffisamment proches de 0, pour conclure en faveur d'un modèle réflectif. Soit τ le vecteur rassemblant les valeurs des tétrades pour l'ensemble de la population, leurs réalisations (t_{ijkl}) seront positives en valeur absolue pour notre échantillon.

En utilisant les données d'échantillon, il faut tester l'hypothèse :

$$\begin{cases} H_0 : \tau = \mathbf{0} \\ H_a : \tau \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

Bollen (1990) a mis au point un test qui estime l'ensemble des tétrades simultanément. La statistique du test a la forme suivante :

$$T = N \mathbf{t}' \Sigma_{tt}^{-1} \mathbf{t}$$

où N est la taille de l'échantillon, $\mathbf{t}$ est un vecteur composé des tétrades indépendantes sur l'échantillon et Σ_{tt} est la matrice de covariance associée à la distribution de $\mathbf{t}$ lorsque N tend vers l'infini.

La statistique T suit asymptotiquement une distribution χ^2 avec un nombre de degrés de liberté égal au nombre de tétrades indépendantes considérées pour le test. L'ensemble des termes de cette statistique peut être estimé sur un échantillon fini (voir en annexe). Un résultat significatif renvoie à ce que les tétrades sont significativement différentes de 0 et que le modèle réflectif doit être rejeté.

Par ailleurs, il est important de préciser que ce test comporte certaines limites d'application. Il sera sensible à un certain nombre de facteurs :

- L'erreur d'échantillonnage devra être « limitée » de façon à trouver des valeurs proches de zéro dans le cas réflectif (risque de classer un modèle réflectif en formatif).

- Ce test ne nécessite pas de distribution spécifique des données, il prend en compte la moyenne, la covariance et l'aplatissement des variables. Néanmoins, nous ne connaissons pas l'effet d'une forte asymétrie de la distribution sur les résultats. De plus, la statistique du test tend asymptotiquement vers une distribution du χ^2 , ceci peut poser des problèmes dans le cas de petits échantillons.
- Les hypothèses préalables doivent bien être vérifiées. En effet, l'existence de corrélations entre les erreurs de mesure entraînera le rejet de l'hypothèse nulle.

Ces hypothèses fortes auront donc tendance à favoriser le rejet du test en cas de «violation». Il aura tendance à favoriser les construits formatifs, car lorsque le nombre d'indicateurs augmentera, les hypothèses d'asymétrie et d'erreur d'échantillonnage modérées seront difficilement remplies et la probabilité de rejet du test augmentera. Lorsque le nombre de variables associées à une variable latente augmente, le nombre de tétrades à tester augmente rapidement. Or si l'un des tests est rejeté, l'ensemble du bloc devra être considéré comme formatif. D'autre part, la puissance statistique du test de tétrades est satisfaite pour des échantillons ayant plus de 200 observations (Bollen et Ting, 2000).

Comme on peut le constater, même si ce test est utile pour les chercheurs, il a des restrictions qui en pratique pourront poser des problèmes. Selon Bollen et Ting (2000), *«the test, like other test in structural equation models, performs best when considerable thinking and work goes into the model before testing»*. Les auteurs recommandent de proposer plusieurs modèles plausibles des relations entre les variables latentes et les indicateurs, ce qui peut aider le chercheur à réaliser des comparaisons. Il faut préciser que pour l'instant ce test n'est intégré dans aucun logiciel de modèles d'équations structurelles. Cependant, une macro SAS est à la disposition des chercheurs (<http://www.cuhk.edu.hk/soc/ting/>).

APPLICATION PRATIQUE

Nous présentons deux applications du test des tétrades, la première basée sur des données simulées afin de mieux comprendre le fonctionnement du test et de vérifier les propriétés présentées plus haut. Et une seconde, basée sur les réponses à un questionnaire de satisfaction à un site web. Nous nous focaliserons sur les variables manifestes associées à la variable latente satisfaction.

Données simulées

Nous simulons des données suivant deux processus. Un premier jeu de données est simulé en suivant le schéma formatif et l'équation :

$$\xi = 0.6x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.8x_4 + \zeta$$

On utilise dans cette simulation une distribution normale pour l'ensemble des données.

En utilisant le test des tétrades, nous voulons vérifier si on obtient bien un modèle de mesure de type formatif.

Le second processus suivra un schéma réflectif. Dans un premier temps, nous considérons seulement 4 indicateurs par construit. Pour évaluer les capacités du test, nous ajoutons au fur et à mesure d'autres indicateurs. Nous testons donc des modèles composés par 4, 6, 8 et 10 indicateurs. On aura donc les équations :

$$x_1 = 0.6\xi + \delta_1$$

$$x_2 = 0.7\xi + \delta_2$$

$$x_3 = 0.5\xi + \delta_3$$

$$x_4 = 0.8\xi + \delta_4$$

...

L'ensemble de ces jeux de données sont composés de 500 observations et sont testés à l'aide du logiciel SAS et de la macro développée par Bollen et Ting (2000).

Pour le premier modèle, on obtient une valeur du χ^2 de 6.92 à 2 degrés de liberté et une p-valeur de 0.07, ce qui nous pousse à choisir un modèle formatif. Donc le résultat du test est conforme à la réalité.

Pour le second processus, nous avons rassemblé dans le tableau suivant les valeurs du χ^2 , les degrés de liberté et les p-valeurs pour chaque nombre de variables manifestes. Ceci nous montre bien que le modèle réflectif doit être accepté dans tous les cas, quel que soit le nombre d'indicateurs lorsque le modèle est bien défini et que les variables manifestes sont normales.

Nombre de variables manifestes	χ^2	Degrés de liberté	p-valeur	Schéma choisi
10	24.20	35	0.915	Réflectif
8	13.85	20	0.838	Réflectif
6	4.52	9	0.874	Réflectif
4	0.27	2	0.870	Réflectif

Tableau 2 : Résultats du test des tétrades sur des données simulées

Cette première application nous a permis de vérifier la validité du test des tétrades et la bonne caractérisation obtenue par celui-ci lorsque les données sont normales.

Sur les données simulées (créées pour satisfaire les hypothèses du test), on peut constater que le test fonctionne sans problèmes, même si on augmente le nombre d'items (dans le cas du modèle réflectif).

Données de satisfaction

Dans la théorie marketing, la variable latente satisfaction est classiquement traitée comme un construit réflectif. Dans notre cas, elle est mesurée par 13 variables manifestes (Sat1, Sat2,..... Sat13), sur un échantillon de 1054 individus dans le cadre d'une analyse de la satisfaction des visiteurs à un site web. Les experts ont considéré que ce construit est de type réflectif. Nous voulons vérifier si les résultats du test des tétrades nous indiquent le même type de relations entre les mesures et la variable latente satisfaction, que celui défini *a priori* par les experts.

Sur notre échantillon, le test nous fournit une valeur du χ^2 de 189 à 65 degrés de liberté et une p-valeur de 0.00. Ceci nous amène donc à rejeter l'hypothèse de la présence d'un schéma réflectif pour cette variable latente, ce qui va à l'encontre des théories sur le sujet.

Ce résultat pose plusieurs questions quant à la validité des choix des experts. Il peut être expliqué par plusieurs facteurs :

- *Des facteurs liés aux concepts* : le choix d'un schéma réflectif suppose une forte corrélation entre les variables manifestes et la consistance interne des construits. Cette dernière propriété ne suffit pas à l'obtention de tétrades nulles. La cohérence de la variable latente créée est alors très importante. En effet, la consistance interne est une condition nécessaire au choix du schéma réflectif mais elle n'est pas suffisante. Il se peut que, dans le cadre de nos données, certaines variables ne s'intègrent pas bien dans le construit satisfaction (en terme d'annulation des tétrades et d'interprétation marketing).
- *Des facteurs liés aux données* : le test des tétrades est sujet à de nombreuses restrictions et nous nous trouvons dans le cas où conjointement le nombre d'indicateurs est très important, les données ont une forte asymétrie et la taille de l'échantillon est très importante. L'ensemble de ces caractéristiques aura tendance à favoriser le schéma formatif et le rejet de l'hypothèse de tétrades nulles.

Bollen et Ting (2000), lorsqu'ils appliquent le test des tétrades sur le construit «satisfaction vis-à-vis de la vie» (mesurée par 5 items : domicile, hobby, famille, amis et santé) obtiennent également le rejet du modèle réflectif.

Les auteurs considèrent que : *«One possible problem is that the large sample size (1005) for these data may lead to excessive power for the vanishing tetrad test. ... excessive power due to large sample size may lead to the rejection of the effect indicator model».*

En nous basant sur les informations liées à nos données, nous allons de tenter de comprendre pourquoi le modèle formatif est sélectionné. Nous commençons par rassembler dans le tableau suivants les propriétés de chacune des 13 variables manifestes (aplatissement et asymétrie) et celles de la variable latente associée (alpha de Cronbach pour mesurer la consistance interne).

	Aplatissement	Asymétrie	Alpha de Cronbach
Satisfaction			0.943893
Sat1	2.1894589	-1.9314450	
Sat2	1.6450149	-1.1199429	
Sat3	1.4569215	-1.0416817	
Sat4	1.4747432	-1.0679262	
Sat5	1.8202408	-1.2450389	
Sat6	0.9916688	-0.9644991	
Sat7	1.1731818	-1.1509712	
Sat8	0.2564263	-0.7843175	
Sat9	1.8190981	-1.2608450	
Sat10	0.9735784	-1.5337508	
Sat11	4.6477873	-1.8439358	
Sat12	0.6837352	-1.0505473	
Sat13	0.6297822	-1.0167728	

Tableau 3 : Propriétés des variables manifestes associées à la satisfaction (lorsque la variable suit une distribution normale, l'aplatissement et l'asymétrie sont nuls)

Nous voyons donc que le bloc est clairement consistant. Mais, les variables manifestes dévient de la normalité, mise à part Sat8, et certaines s'en éloignent fortement comme Sat1 («satisfaction globale») et Sat11 («être un site facile à utiliser»). Le test de Kolmogorov-Smirnov rejette l'hypothèse de multinormalité. Nous savons que le test des tétrades prend en compte l'aplatissement, mais pas l'asymétrie. On peut supposer que ce paramètre peut avoir un effet sur le résultat du test.

Par ailleurs, l'application du test des tétrades sur l'ensemble des combinaisons possibles de variables manifestes nous a permis de mettre en valeur les combinaisons de variables manifestes qui permettent d'obtenir un schéma réflectif. Nous en rassemblons quelques-unes dans le tableau suivant ainsi que les résultats du test pour celles-ci. Il faut préciser que dans notre cas, au-delà de 6 indicateurs, le modèle formatif est toujours choisi.

Combinaisons	Nombre de variables	χ^2	Degrés de liberté	p-valeur
Sat3, Sat4, Sat5, Sat6	4	1.75	2	0.42
Sat6, Sat7, Sat8, Sat9	4	1.17	2	0.56
Sat7, Sat8, Sat9, Sat10	4	1.37	2	0.50
Sat4, Sat7, Sat8, Sat9, Sat10	5	6.41	5	0.27
Sat3, Sat4, Sat5, Sat6, Sat8	5	7.32	5	0.21
Sat3, Sat5, Sat6, Sat8, Sat9, Sat10	6	11.43	9	0.16

Tableau 4 : Combinaisons de mesures ayant un schéma réflectif

Il ressort que les mesures Sat1, Sat2, Sat11, Sat12 et Sat13 sont toujours exclues des combinaisons donnant un modèle réflectif.

Sur nos données, il s'avère que le nombre d'indicateurs définissant une variable latente doit être raisonnable (entre 4 et 6). Ceci s'explique par le fait qu'au-delà de 6 variables manifestes, le nombre de tétrades non-redondantes devient très important et la probabilité que l'ensemble de ces tétrades s'annulent devient très faible (sauf sur des données suivant strictement un schéma réflectif, sans possibilité de déviation de corrélation entre les erreurs ou d'erreur issue de l'échantillonnage trop importante).

Dans le cadre de notre application pratique, on dispose de 65 tétrades non redondantes, et donc la probabilité que toutes ces combinaisons de covariances soient proches de zéro est très faible.

Finalement, en étudiant les mesures qui forment un schéma réflectif (voir tableau 4), il ressort que ce sont des variables concernant d'une part, la satisfaction relative aux contenus fournis par le site web (Sat3, Sat4, Sat5, Sat6) et d'autre part, la satisfaction relative au confort d'utilisation du site (Sat7, Sat8, Sat9, Sat10). La satisfaction globale modélisée par la variable Sat1 ne permet pas de construire un modèle réflectif.

Cette application nous a permis de voir que, lorsqu'on possède beaucoup d'indicateurs et que l'on veut conserver un schéma réflectif, il est important de sélectionner les variables définissant le mieux le concept. Le test des tétrades peut alors être d'une grande utilité à condition de bien vérifier les hypothèses sous-jacentes à celui-ci. Les conclusions énoncées jusqu'ici ne relèvent que du cas de cet exemple et du domaine étudié, et ne peuvent pas être directement généralisées.

DISCUSSION ET CONCLUSION

Plusieurs travaux (Baumgartner et Homburg, 1996; Jarvis, MacKenzie et Podsakoff, 2003; Crie, 2005; MacKenzie, Podsakoff et Jarvis, 2005; Tensaout, 2006) précisent que dans les applications pratiques réalisées, le modèle réflectif est le plus utilisé. Ce modèle est approprié dans des nombreux cas, mais pas dans tous (Jarvis, Mackenzie et Podsakoff, 2003).

Le choix entre le modèle réflectif et formatif est très important, car comme le soulignent Fornell, Rhee et Yi (1991), il influence directement la puissance prédictive du modèle

Vu l'importance du modèle de mesure, ce travail se focalise sur la définition de l'orientation des relations entre les variables manifestes et les variables latentes, plus précisément sur la présentation et l'utilisation du test des tétrades. Malgré son utilisation fréquente dans des articles théoriques, il est pratiquement absent dans les recherches empiriques en marketing.

L'application pratique réalisée nous a permis de montrer les capacités de ce test. Pour ce faire, deux types de données ont été utilisés : des données simulées (sur un schéma formatif et réflectif) qui respectent les hypothèses du test, et des données réelles issues d'une enquête de satisfaction.

Sur les données simulées, les résultats donnés par le test sont toujours conformes à la réalité. Pour voir quelles sont ses «réactions», nous avons augmenté progressivement le nombre d'indicateurs. On peut constater que, sur les données simulées, l'augmentation des items n'a aucune influence sur le fonctionnement du test.

Le problème intervient lorsqu'on utilise les données réelles, issues d'une enquête de satisfaction. Nous nous concentrons sur la variable latente satisfaction qui, dans notre cas, est expliquée par 13 items. Lorsqu'on applique le test sur l'ensemble de variables, le résultat nous indique le rejet du modèle réflectif pour ce construit. Cependant, nous ne pouvons pas accepter ce résultat comme tel, car, dans la théorie marketing, la satisfaction des clients est considérée comme un construit réflectif.

Plusieurs facteurs peuvent expliquer ce résultat. Par exemple, des facteurs liés aux concepts – dans le cadre de nos données il est possible d'avoir des mesures qui ne s'intègrent pas bien dans le construit satisfaction; des facteurs liés aux données : nous nous trouvons dans le cas où conjointement le nombre d'indicateurs est très important, les données dévient fortement de

la distribution normale et la taille de l'échantillon est très importante. Toutes ces caractéristiques auront donc tendance à favoriser le schéma formatif.

Cependant, nous avons identifié des combinaisons d'items qui permettent d'obtenir un schéma réflectif. Ainsi, nous avons constaté que sur certaines combinaisons d'items le test indique que le modèle est de type réflectif. Si le nombre d'items est supérieur à 6, le nombre de tétrades non redondantes devient très important et la probabilité que toutes ces tétrades s'annulent devient très faible. Cet aspect doit être à l'esprit du chercheur lorsqu'il travail sur des données réelles. Il faut tenir compte du fait que, dans la pratique, le nombre d'indicateurs définissant une variable latente doit être raisonnable.

En conséquence, le test des tétrades peut être un instrument très utile pour les chercheurs, à condition de bien vérifier les hypothèses sous-jacentes à celui-ci (le nombre d'indicateurs définissant une variable latente doit être raisonnable, l'erreur d'échantillonnage limitée et les erreurs de mesure non corrélées). Cependant, il ne peut pas remplacer entièrement l'expérience des chercheurs et, comme tout instrument statistique, il faut l'utiliser avec prudence. Ces résultats doivent permettre au chercheur et au praticien de se poser des questions sur l'adaptabilité de son modèle, la validité statistique de celui-ci et la satisfaction des hypothèses préalables à l'application du test. Comme le souligne Bollen et Ting (2000) : *«the outcome of the test does not prove the validity of the specification with the best fit; other models may exist with as good or even a superior fit»*.

Les données réelles utilisées dans ce travail sont issues d'une enquête de satisfaction réalisée dans le domaine des services, plus précisément dans le domaine de l'Internet. L'ensemble des résultats sur cette étude se limite à ce domaine et ne peut pas être généralisé. La réplication de ce travail sur d'autres données issues d'autres secteurs d'activité pour comparer ainsi les résultats pourrait être une piste de recherche. D'autre part, les discussions sur la nature de la variable latente restent au cœur de la recherche et des applications (numéro spécial de la revue *Journal of Business Research* sur les construit formatifs, à paraître).

Pour conclure, nous tenons à rappeler un principe extrêmement important dans le cadre de ce type de méthodes : quelle que soit la méthode statistique utilisée, il faut toujours utiliser la connaissance du domaine d'application afin de spécifier le modèle. Les méthodes statistiques permettent de valider cette connaissance préalable et non de la générer.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Anderson J. C. et Gerbing D. W. (1984), The effect of sampling error on convergence, improper solutions, and goodness-of-fit indices for maximum likelihood confirmatory factor analysis, *Psychometrika*, 49, 2, 155–173

Bagozzi R. P. (1980), *Causal models in marketing*, New York, John Wiley & Sons

Bagozzi R. P. (2007), On the meaning of formative measurement and how it differs from reflective measurement: Comment on Howell, Breivik, and Wilcox (2007), *Psychological Methods*, 12, 229-237

Bagozzi R.P. et Phillips L.W. (1982), Representing and testing organizational theories: a holistic construal, *Administrative Science Quarterly*, 27, 3, 459-489

Bass F.M. (1995), Empirical generalizations and marketing science: a personal view, *Marketing Science*, 14, 3, 6–19

Baumgartner H. et Homburg C. (1996), Applications of structural equation modeling in marketing and consumer research: a review, *International Journal of Research in Marketing*, 13, 2, 139-161

Bollen, K.A. (1984), Multiple indicators: internal consistency or no necessary relationship?, *Quality and Quantity*, 18, 4, 377-385

Bollen K.A. (1989), *Structural equations with latent variables*, New York, Wiley

Bollen, K.A. (1990), Outlier screening and a distribution-free test for vanishing tetrads, *Sociological Methods & Research*, 19, 1, 80-92

Bollen K. A. (2002), Latent variables in psychology and the social sciences, *Annual Review of Psychology*, 53, 605 - 634

Bollen K. A. (2007), Interpretational confounding is due to misspecification, not to type of indicator: comment on Howell, Breivik, and Wilcox (2007), *Psychological Methods*, 12, 219-228

Bollen K.A. et Lennox R. (1991), Conventional wisdom on measurement: a structural equation perspective, *Psychological Bulletin*, 110, 2, 305-314

Bollen K.A. et Ting K.F. (1993), Confirmatory tetrad analysis, *Sociological Methodology*, 23, 147 – 176

Bollen K.A. et Ting K.F. (2000), A tetrad test for causal indicators, *Psychological Methods*, 5, 1, 3 – 22

Borsboom D., Mellenbergh G.J. et van Heerden J. (2003), The theoretical status of latent variables, *Psychological Review*, 110, 2, 203-219

Churchill G. (1979), A paradigm for developing better measures of marketing constructs, *Journal of Marketing Research*, 16, February, 64 73

Crié D. (2005), De l'usage des modèles réflectif ou formatif dans les modèles d'équations structurelles, *Recherche et Applications en Marketing*, 20, 2, 5 - 28

Edwards J. R. et Bagozzi R. P. (2000), On the nature and direction of relationships between constructs and measures, *Psychological Methods*, 2000, 5, 2, 155 - 174

Fornell C. et Bookstein F. L. (1982), Two structural equation models: LISREL and PLS applied to consumer exit – voice theory, *Journal of Marketing Research*, XIX, November, 440 – 452

Fornell C., Rhee B. et Yi Y. (1991), Direct regression, reverse regression and covariance structure analysis, *Marketing Letters*, 2, 3, 309 - 320

Gerbing D. W. et Anderson J. C. (1988), Structural equation modeling in practice: a review and recommended two-step approach, *Psychological Bulletin*, 103, 3, 411-423

Glymour C. *et alii*, (1987), *Discovering causal structure*, Orlando, FL: Academic Press

Hayduk L.A. (1987), *Structural equation modeling with LISREL*, Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press

Lee B., Barua A., et Whinston A.B. (1997), Discovery and representation of causal relationships in MIS research: a methodological framework, *MIS Quarterly*, 21, 1, 109-136

Hipp J.R. et Bollen K.A. (2003), Model fit in structural equation models with censored, ordinal, and dichotomous variables: testing vanishing tetrads, *Sociological Methodology*, 33, 1, 267-305

Hipp J.R., Bauer D.J. et Bollen K.A. (2005), Conducting tetrad tests of model fit and contrasts of tetrad-nested models: a new SAS macro, *Structural Equation Modeling*, 12, 1, 76-93

Howell R.D., Breivik E. et Wilcox J.D. (2007a), Reconsidering formative measurement, *Psychological Methods*, 12, 205-218

Howell R.D., Breivik E. et Wilcox J.D. (2007b), Is formative measurement really measurement? Reply to Bollen (2007) and Bagozzi (2007), *Psychological Methods*, 12, 238-245

Jarvis C.B., MacKenzie S.B et Podsakoff P.M. (2003), A critical review of construct indicators and measurement model misspecification in marketing and consumer research, *Journal of Consumer Research*, 30, September, 199 – 218

Jöreskog, K.G. (1967), Some contributions to maximum likelihood factor analysis, *Psychometrika*, 32, 4, 443 - 482

Jöreskog K.G. (1970), A general method for analysis of covariance structures, *Biometrika*, 57, 2, 239-251

Kaplan D. (2000), *Structural equation modelling: foundations and extensions*, Thousand Oaks, CA, Sage

Kelley T.L. (1928), *Crossroads in the mind of man*, Stanford, C.A: Stanford University

MacCallum R.C. et Browne M. W (1993), The use of causal indicators in covariance structure models: some practical issues, *Psychological Bulletin*, 114, 3, 533-541

MacKenzie S. B, Podsakoff P. M et Jarvis C. B. (2005), The problem of measurement model misspecification in behavioral and organizational research and some recommended solutions, *Journal of Applied Psychology*, 90, 4, 710 - 730

Peter J.P (1981), Construct validity: a review of basic issues and marketing practices, *Journal of Marketing Research*, 18, 2, 133-145

Rossiter J.R. (2002), The C-OAR-SE procedure for scale development in marketing, *International Journal of Research in Marketing*, 19, 4, 305-335

Spearman C. (1904), General intelligence, objectively determined and measured, *American Journal of Psychology*, 15, 201-293

Spearman C. (1927), *The abilities of man*, New York, Macmillan

Tenenhaus M. *et alii*, (2005), PLS path modeling, *Computational Statistics and Data Analysis*, 48, 1, 159-205

Tensaout M. (2006), Spécification des modèles de mesure en marketing, *Actes du Congrès de l'Association Française du Marketing*, Nantes

Valette-Florence P. (1988), Spécificités et apports des méthodes d'analyse multivariée de la deuxième génération, *Recherche et Applications en Marketing*, 3, 4, 23-56

Williams L.J., Edwards J.R. et Vandenberg R.J. (2003), Recent advances in causal modeling methods for organizational and management research, *Journal of Management*, 29, 6, 903 – 936

Wold H. (1966), Estimation of principal components and related models by iterative least squares, *Multivariate Analysis*, éd. P.R. Krishnaiah, New York, Academic Press, 391-420

Wold H. (1982), Soft modeling: the basic design and some extensions, *Systems under Indirect Observation*, vol. 2, éds. K. G. Jöreskog et H. Wold, Amsterdam, North Holland, 1-54

Wold H. (1985), Partial Least Squares, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, éds. S. Kotz et N. Johnson, New York, Wiley, 581-591

ANNEXE

Calcul de la statistique du test

Bollen (1990) a mis au point un test qui estime l'ensemble des tétrades simultanément. La statistique du test a la forme suivante :

$$T = N \mathbf{t}' \Sigma_{tt}^{-1} \mathbf{t}$$

où N est la taille de l'échantillon, $\mathbf{t}$ est un vecteur composé des tétrades indépendantes sur l'échantillon et Σ_{tt} est la matrice de covariance asymptotique de $\mathbf{t}$ (lorsque N tend vers l'infini).

La statistique T suit asymptotiquement une distribution χ^2 avec un nombre de degrés de liberté égal au nombre de tétrades indépendantes considérées pour le test. L'ensemble des termes de cette statistique peut être estimé sur un échantillon fini.

$\mathbf{t}$ est connu, N aussi. Il reste donc à estimer la matrice Σ_{tt} de covariance des tétrades non redondantes pour la population.

Plusieurs pas devront être utilisés. Soit $\mathbf{s}$ le vecteur des éléments non redondant de l'estimation sur l'échantillon de la matrice de covariance. Soit $\boldsymbol{\sigma}$ un vecteur construit de la même manière à partir de la matrice de covariance de la population. On a donc $E(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\sigma}$. On aura :

$$\sqrt{N}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \Sigma_{ss})$$

Les éléments de Σ_{ss} sont les covariances des covariances issues de l'échantillon. En général, on a :

$$[\Sigma_{ss}]_{ef,gh} = \sigma_{efgh} - \sigma_{ef} \sigma_{gh},$$

où σ_{efgh} est le moment de quatrième ordre des variables e, f, g et h . Comme on considère que les données sont distribuées normalement, on pourra simplifier la formule précédente :

$$[\Sigma_{ss}]_{ef,gh} = \sigma_{eg} \sigma_{fh} - \sigma_{eh} \sigma_{fg},$$

Jusqu'ici nous avons travaillé sur la matrice de covariance asymptotique des covariances de l'échantillon. Nous allons maintenant rechercher la variance asymptotique des tétrades. Soit

τ le vecteur rassemblant l'ensemble des équations associées aux tétrades nulles non redondantes. Chaque élément de ce vecteur prend la forme : $\sigma_{gh}\sigma_{ij} - \sigma_{gi}\sigma_{hj}$. Soit σ le vecteur de l'ensemble des covariances incluses dans τ . Les estimations des tétrades t sont des fonctions non linéaires des éléments de σ . En utilisant les résultats précédents et la méthode delta, on peut obtenir la matrice de variance asymptotique de t que nous recherchons Σ_{tt} , on obtient que :

$$\sqrt{N}t \xrightarrow{D} N(0, \Sigma_{tt})$$

$$\Sigma_{tt} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right)' \Sigma_{ss} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right)$$

où Σ_{tt} est la matrice de covariance asymptotique de t , Σ_{ss} est la matrice de covariance asymptotique des covariances qui apparaissent dans les tétrades. L'ensemble des paramètres du terme de droite peuvent alors être estimés en remplaçant les paramètres pour l'ensemble de la population par leur estimation sur l'échantillon.

On peut alors estimer la statistique T et tester l'hypothèse H_0 en regardant si la valeur du χ^2 est inférieure à sa valeur critique.